## INTRODUZIONE ALL'ALGEBRA DELLE MATRICI

### 1 – LE MATRICI

Sia (K, +, .) un campo con elemento neutro additivo 0 ed elemento neutro moltiplicativo 1; siano, inoltre, $m$ e $n$ due numeri naturali non nulli.

**DEF. 1.1** Chiamiamo **matrice** $m \times n$ a coefficienti in K una tabella di $m.n$ elementi di K, disposti su $m$ righe e $n$ colonne.

**ESEMPIO** Se K=**R**, $m = 3$ e $n = 2$, una matrice è $\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ -1 & 0 \\ ½ & 1 \end{bmatrix}$

**NOTAZIONI E TERMINOLOGIA**

1. Denotiamo le matrici con le lettere scritte in stampatello maiuscolo.
2. Se A è una matrice, indichiamo con $\mathbf{a_{ij}}$ l'elemento di K che occupa nella tabella la posizione individuata dalla riga i-esima (i=1, ..., $m$) e dalla colonna j-esima (j=1, ..., $n$).
3. Indichiamo una matrice $m \times n$ con $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, a_{ij} \,]_{\substack{i \in Im \\ j \in In}} = [\, a_{ij} \,]$,

essendo $I_m := \{1, \dots, m\}$ (insieme degli indici di riga) e $I_n := \{1, \dots, n\}$ (insieme degli indici di colonna).

4. Per denotare la totalità delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K (**matrici rettangolari**) utilizziamo la scrittura $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$; nel caso in cui $m = n$ diciamo **quadrate** le matrici e indichiamo con $\mathbf{Mat_n(K)}$ il loro insieme.



A CURA DELLA DOTT.SSA C. ALBERTI

5. Le matrici di $\mathbf{Mat_{1,n}(K)}$ hanno una sola riga e sono dette **vettori riga**; in modo analogo, le matrici di $\mathbf{Mat_{m,1}(K)}$ che hanno una sola colonna sono dette **vettori colonna**.

Nella matrice $A = [a_{ij}]$ di $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$

la riga i-esima ($i \in I_m$) è la matrice di $\mathbf{Mat_{1,n}(K)}$ data da $[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$,

la colonna j-esima ($j \in I_n$) è la matrice di $\mathbf{Mat_{m,1}(K)}$ data da $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

6. Per le matrici di $\mathbf{Mat_n(K)}$, $n$ è detto **ordine** delle matrici; inoltre, una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ è di ordine $n$, si individuano due particolari sottoinsiemi:

$$\{a_{ii} \in K \mid i \in I_n\} \text{ detto } \textbf{diagonale principale},$$

$$\{a_{i\,(n+1)-i} \in K \mid i \in I_n\} \text{ detto } \textbf{diagonale secondaria}.$$

È possibile definire alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbf{Mat_n(K)}$:

<u>DEF</u>. <u>**1.2**</u> Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mat_n(K)}$; A è detta

i) **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$, $\forall i, j \in I_n$, $i>j$, cioè sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale; indichiamo con $\mathcal{T}_s$ il sottoinsieme delle matrici triangolari superiori di $\mathbf{Mat_n(K)}$;

ii) **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$, $\forall i, j \in I_n$, $i<j$, cioè sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale; indichiamo con $\mathcal{T}_i$ il sottoinsieme delle matrici triangolari inferiori di $\mathbf{Mat_n(K)}$;

iii) **diagonale** se $a_{ij} = 0$, $\forall i, j \in I_n$, $i \neq j$, cioè sono nulli tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale; indichiamo con $\mathcal{D}$ il sottoinsieme delle matrici diagonali di $\mathbf{Mat_n(K)}$;

iv) **scalare** se A è diagonale e $a_{ii} = a$, $\forall i \in I_n$.

<u>**OSSERVAZIONE**</u> Si verifica facilmente che $\mathcal{D} = \mathcal{T}_s \cap \mathcal{T}_i$.

<u>DEF</u>. <u>**1.3**</u> Due matrici si dicono **uguali** se hanno lo stesso numero di righe, lo stesso numero di colonne e gli elementi ordinatamente uguali, ossia per $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$

$$A = B \text{ se } \mathbf{a_{ij} = b_{ij}},\ \forall (i,j) \in I_m \times I_n.$$

<u>DEF</u>. <u>**1.4**</u> Sia $A=[a_{ij}] \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$; chiamiamo **trasposta** di A la matrice di $\mathbf{Mat_{n,m}(K)}$ indicata con $A^t$ e definita nel modo seguente:

$$A^t = [a'_{ji}] \text{ tale che } a'_{ji} = a_{ij},\ \forall (j,i) \in I_n \times I_m.$$

<u>**ESEMPIO**</u> Consideriamo la matrice $A \in \mathbf{Mat_{3,2}(R)}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 0 & -5 \\ 7 & \pi \end{bmatrix}$; la sua trasposta appartiene a $\mathbf{Mat_{2,3}(R)}$ ed è $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 13 & -5 & \pi \end{bmatrix}$

<u>**PROPOSIZIONE**</u> <u>**1.5**</u> Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$; si ha $(A^t)^t = A$.

La dimostrazione della proposizione è lasciata al lettore.

**PROPOSIZIONE 1.6** Sia $A \in \mathbf{Mat}_n(K)$: A è triangolare superiore se e solo se la sua trasposta è triangolare inferiore.

Se indichiamo con

$$\mathfrak{T}_s^{\,t} := \{A \in \mathbf{Mat}_n(K) \mid \exists B \in \mathfrak{T}_s : A = B^t\},$$

$$\mathfrak{T}_i^{\,t} := \{A \in \mathbf{Mat}_n(K) \mid \exists C \in \mathfrak{T}_i : A = C^t\},$$

abbiamo $\mathfrak{T}_s^{\,t} = \mathfrak{T}_i$ e $\mathfrak{T}_i^{\,t} = \mathfrak{T}_s$.

**DEF. 1.7** Una matrice A di $\mathbf{Mat}_{m,n}(K)$ si dice **simmetrica** se $A^t = A$.

**PROPRIETÀ 1.8** Sia $A=[a_{ij}] \in \mathbf{Mat}_{m,n}(K)$; se A è simmetrica

i) A è quadrata ($m = n$);

ii) $\forall (i,j) \in I_n \times I_n : a_{ij} = a_{ji}$.

Le dimostrazioni seguono immediatamente dalle definizioni di matrice simmetrica, trasposta di una matrice e uguaglianza tra matrici.

Indichiamo con $\mathfrak{S}$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat}_n(K)$.

**PROPOSIZIONE 1.9** Una matrice diagonale è una matrice simmetrica:

$$\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{S}.$$



## 2 – LO SPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI

**DEF. 2.1** Dati $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in \mathbf{Mat}_{m,n}(K)$ e $\alpha \in K$, chiamiamo

i) **matrice somma** di A con B la matrice $C=[c_{ij}]$ di $\mathbf{Mat}_{m,n}(K)$ indicata con $C = A \oplus B$ e tale che

$$\forall (i,j) \in I_m \times I_n \quad \mathbf{c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}}\ ;$$

ii) **matrice prodotto** dello scalare $\alpha$ per la matrice A la matrice $D=[d_{ij}]$ di $\mathbf{Mat}_{m,n}(K)$ indicata con $D = \alpha \bullet A$ e tale che

$$\forall (i,j) \in I_m \times I_n \quad \mathbf{d_{ij} := \alpha . a_{ij}}\ .$$

**ESEMPIO** Consideriamo in $\mathbf{Mat}_{2,3}(\mathbf{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -6 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3/7 \\ 0 & 3/2 & -8 \end{bmatrix}, \alpha = 2; \quad \text{abbiamo:}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3/7 \\ -6 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 2 \bullet A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -12 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**PROPOSIZIONE 2.2** $(\mathbf{Mat}_{m,n}(K), \oplus, \bullet)$ è uno spazio vettoriale su K.

La dimostrazione è lasciata al lettore; segnaliamo solo che

i) la **matrice nulla**, elemento neutro additivo indicato con $\underline{\mathbf{0}}$, è la matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0;

ii) la **matrice opposta** di $A=[a_{ij}]$ è la matrice indicata con $-\mathbf{A}$ che ha come elementi gli opposti degli elementi di A: $-A = [-a_{ij}]$.

**PROPRIETÀ 2.3** Qualunque siano A, B $\in$ $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$ e $\alpha\in K$, si ha:

i) $(A\oplus B)^t = A^t\oplus B^t$;

ii) $(\alpha\bullet A)^t = \alpha\bullet A^t$.

Dimostrazione.

i) Sia $C = [c_{ij}] = A\oplus B$: per definizione di matrice somma abbiamo

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \quad \forall(i,j)\in I_m\times I_n;$$

segue che $C^t = [c_{ji}] = (A\oplus B)^t$ con

$$c_{ji} := a_{ji} + b_{ji} \quad \forall(j,i)\in I_n\times I_m.$$

Sia ora $C' = [c'_{ji}] = A^t\oplus B^t$: dalla definizione di matrice somma segue

$$c'_{ji} := a_{ji} + b_{ji} \quad \forall(j,i)\in I_n\times I_m,$$

ossia $c'_{ji} = c_{ji}$ $\forall(j,i)\in I_n\times I_m$, quindi $C' = C^t$.

ii) La dimostrazione è analoga alla precedente.

**DEF. 2.4** Una matrice A di $\mathbf{Mat_n(K)}$ si dice **antisimmetrica** (o **emisimmetrica**) se $A^t = -A$.

Indichiamo con $\mathcal{A}$ il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_n(K)}$.

**PROPRIETÀ 2.5** Sia $A=[a_{ij}]\in\mathbf{Mat_n(K)}$; se A è antisimmetrica e la caratteristica del campo K è diversa da 2 allora $a_{ii} = 0$, per ogni i=1, ..., n.

Dimostrazione.

Per ipotesi $A^t = -A \Rightarrow \forall i,j\in I_n\ a_{ji} = -a_{ij} \Rightarrow \forall i\in I_n\ a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow \forall i\in I_n\ 2a_{ii} = 0$

$\Rightarrow$ essendo car$K \neq 2$, $\forall i\in I_n\ a_{ii} = 0$.



**PROPOSIZIONE 2.6** Gli insiemi $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{Mat_n(K)}$.

Dimostrazione.

i) Consideriamo $\mathcal{T}_s = \{A=[a_{ij}]\in\mathbf{Mat_n(K)} \mid a_{ij}=0,\ \forall i, j\in I_n,\ i>j\}$ e verifichiamo che

$$\forall A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]\in\mathcal{T}_s,\ \forall\alpha, \beta\in K:\ \alpha\bullet A\oplus \beta\bullet B\in\mathcal{T}_s;$$

infatti, la matrice $\alpha\bullet A\oplus\beta\bullet B$ ha elemento $\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$ $\forall(i,j)\in I_n\times I_n$, per cui se $i>j$ abbiamo $\alpha 0 + \beta 0 = 0$ e, quindi, $\alpha\bullet A\oplus\beta\bullet B\in\mathcal{T}_s$.

Le dimostrazioni relative ai sottoinsiemi $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{D}$ sono analoghe alla precedente.

ii) Consideriamo $\mathcal{S} = \{A\in\mathbf{Mat_n(K)} \mid A^t = A\}$ e verifichiamo che

$$\forall A, B\in\mathcal{S},\ \forall\alpha, \beta\in K:\ \alpha\bullet A\oplus\beta\bullet B\in\mathcal{S};$$

infatti:

$$(\alpha\bullet A\oplus\beta\bullet B)^t \underset{\text{Prop. 2.3 i)}}{=} (\alpha\bullet A)^t \oplus (\beta\bullet B)^t \underset{\text{Prop. 2.3 ii)}}{=} \alpha\bullet A^t\oplus\beta\bullet B^t \underset{A,\,B\in\mathcal{S}}{=} \alpha\bullet A\oplus\beta\bullet B.$$

La dimostrazione relativa al sottoinsieme $\mathcal{A}$ è analoga alla precedente.

**NB** Per non appesantire troppo le notazioni, nel seguito indicheremo l'addizione tra matrici con + e il prodotto per uno scalare con . (o senza alcun simbolo).

**PROPOSIZIONE 2.7** Lo spazio vettoriale $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$ è finitamente generato e ha dimensione *m.n*.

Dimostrazione.

Per ogni $h\in I_m$ e $k\in I_n$ indichiamo con $E_{hk}$ la matrice di $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$ definita

da:
$$E_{hk} := [\delta_{ij}] \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,k) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (h,k) \end{cases},$$
ossia $E_{hk}$ ha tutti i coefficienti uguali a 0, tranne quello di posto (h,k) che è 1.

Sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)} \mid \exists h \in I_m,\ k \in I_n\colon A = E_{hk}\}$; proviamo che $\mathcal{B}$ è una base per $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$:

- $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori per $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$:
  - $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{Mat_{m,n}(K)} \Rightarrow \langle\mathcal{B}\rangle \subseteq \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$;
  - $\forall A=[a_{ij}] \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, in forza delle definizioni 2.1, possiamo scrivere
  $$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \ldots + a_{mn}E_{mn} = \sum_{\substack{i\in I_m \\ j \in I_n}} a_{ij}E_{ij},$$
  con $a_{ij} \in K$, ossia $A \in \langle\mathcal{B}\rangle$, dunque $\mathbf{Mat_{m,n}(K)} \subseteq \langle\mathcal{B}\rangle$;

dalla doppia inclusione segue che $\langle\mathcal{B}\rangle = \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$.

- $\mathcal{B}$ è un insieme libero:

sia $\sum_{\substack{h\in I_m \\ k \in I_n}} \alpha_{hk}E_{hk} = \underline{0}$ con $\alpha_{hk} \in K$; ciò significa che $\forall (i,j) \in I_m \times I_n$ : $(\sum_{\substack{h\in I_m \\ k \in I_n}} \alpha_{hk}E_{hk})_{ij} = 0$,
ossia, in forza della definizione di $E_{hk}$, $\forall (i,j) \in I_m \times I_n$: $\alpha_{ij} = 0$ e ciò prova che
le matrici $E_{hk}$ sono linearmente indipendenti.

Infine: dim $\mathbf{Mat_{m,n}(K)} = |\mathcal{B}| = m.n.$

La base $\mathcal{B}$ introdotta nella precedente definizione è detta **base canonica** di $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$.

__**PROPOSIZIONE**__ __**2.8**__ In $\mathbf{Mat_n(K)}$

i) il sottospazio $\mathcal{T}_s\mathbf{(K)}$ ha dimensione $n(n+1)/2$;



ii) il sottospazio $\mathcal{T}_i\mathbf{(K)}$ ha dimensione $n(n+1)/2$;

iii) il sottospazio $\mathcal{D}\mathbf{(K)}$ ha dimensione $n$;

iv) il sottospazio $\mathcal{S}\mathbf{(K)}$ ha dimensione $n(n+1)/2$;

v) il sottospazio $\mathcal{A}\mathbf{(K)}$ ha dimensione $n(n-1)/2$.

La dimostrazione viene lasciata al lettore; per ogni sottospazio si precisa una possibile base:

i) Per ogni h, $k \in I_n$ con $\mathbf{h \leq k}$, indichiamo con $E'_{hk}$ la matrice di $\mathbf{Mat_n(K)}$ definita da:
$$E'_{hk} := [\delta_{ij}] \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,k) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (h,k) \end{cases};$$
sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists h,k \in I_n,\ h \leq k\colon A = E'_{hk}\}$: $\mathcal{B}$ è una base per $\mathcal{T}_s\mathbf{(K)}$.

ii) Per ogni h, $k \in I_n$ con $\mathbf{h \geq k}$, indichiamo con $E^*_{hk}$ la matrice di $\mathbf{Mat_n(K)}$ definita da:
$$E^*_{hk} := [\delta_{ij}] \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,k) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (h,k) \end{cases};$$
sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists h,k \in I_n,\ h \geq k\colon A = E^*_{hk}\}$: $\mathcal{B}$ è una base per $\mathcal{T}_i\mathbf{(K)}$.

iii) Per ogni $h \in I_n$, indichiamo con $D_h$ la matrice di $\mathbf{Mat_n(K)}$ definita da:
$$D_h := [d_{ij}] \text{ con } d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,h) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (h,h) \end{cases};$$
sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists h \in I_n\colon A = D_h\}$: $\mathcal{B}$ è una base per $\mathcal{D}\mathbf{(K)}$.

iv) Per ogni h, $k \in I_n$ con $\mathbf{h \geq k}$, indichiamo con $S_{hk}$ la matrice di $\mathbf{Mat_n(K)}$ definita da:
$$S_{hk} := [s_{ij}] \text{ con } s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,k) \text{ o } (i,j) = (k,h) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases};$$

sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists h,k \in I_n,\ h \geq k\colon A = S_{hk}\}$: $\mathcal{B}$ è una base per $\mathbb{S}\mathbf{(K)}$.

v) Per ogni h, $k \in I_n$ con $\mathbf{h>k}$, indichiamo con $A_{hk}$ la matrice di $\mathbf{Mat_n(K)}$ definita da:

$$A_{hk} := [\delta_{ij}] \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (h,k)\ ; \\ -1 & \text{se } (i,j) = (k,k) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

sia $\mathcal{B} = \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists h,k \in I_n,\ h>k\colon A = A_{hk}\}$: $\mathcal{B}$ è una base per $\mathcal{A}\mathbf{(K)}$.

**<u>PROPOSIZIONE</u> <u>2.9</u>**

i) Se car$K \neq 2$ si ha $\mathbf{Mat_n(K)} = \mathbb{S}\mathbf{(K)} \oplus \mathcal{A}\mathbf{(K)}$.

ii) $\mathbf{Mat_n(K)} = \mathcal{T}_s\mathbf{(K)} + \mathcal{T}_i\mathbf{(K)}$.

Dimostrazione.

i) Qualunque sia la matrice A di $\mathbf{Mat_n(K)}$ vale l'identità

$$A = \tfrac{1}{2}(A+A^t) + \tfrac{1}{2}(A-A^t),$$

nella quale

- la matrice $\frac{1}{2}(A+A^t)$ è simmetrica:

$$[\tfrac{1}{2}(A+A^t)]^t \underset{\text{Prop. 2.3 ii)}}{=} \tfrac{1}{2}(A+A^t)^t \underset{\text{Prop. 2.3 i)}}{=} \tfrac{1}{2}[A^t+(A^t)^t] \underset{\text{Prop. 1.1}}{=} \tfrac{1}{2}(A^t+A) = \tfrac{1}{2}(A+A^t)$$

- la matrice $\frac{1}{2}(A-A^t)$ è antisimmetrica:

$$[\tfrac{1}{2}(A-A^t)]^t \underset{\text{Prop. 2.3 ii)}}{=} \tfrac{1}{2}(A-A^t)^t \underset{\text{Prop. 2.3 i)}}{=} \tfrac{1}{2}[A^t-(A^t)^t] \underset{\text{Prop. 1.1}}{=} \tfrac{1}{2}(A^t-A) = -\tfrac{1}{2}(A-A^t)$$

$\Rightarrow A \in \mathbb{S}\mathbf{(K)}+\mathcal{A}\mathbf{(K)} \Rightarrow \mathbf{Mat_n(K)} \subseteq \mathbb{S}\mathbf{(K)}+\mathcal{A}\mathbf{(K)}$.

L'inclusione opposta è ovvia, essendo $\mathbb{S}\mathbf{(K)}$ e $\mathcal{A}\mathbf{(K)}$ sottospazi di $\mathbf{Mat_n(K)}$, pertanto $\mathbf{Mat_n(K)} = \mathbb{S}\mathbf{(K)}+\mathcal{A}\mathbf{(K)}$.

Applicando la formula di Grassmann si ha

$\dim(\mathbb{S}\mathbf{(K)} \cap \mathcal{A}\mathbf{(K)}) = \dim(\mathbb{S}\mathbf{(K)}) + \dim(\mathcal{A}\mathbf{(K)}) - \dim(\mathbb{S}\mathbf{(K)}+\mathcal{A}\mathbf{(K)})$



da cui, applicando la proposizione 2.6 e la prima parte della dimostrazione:

$\dim(\mathbb{S}\mathbf{(K)} \cap \mathcal{A}\mathbf{(K)}) = n(n+1)/2 + n(n-1)/2 - n^2 = 0$,

dunque $\mathbb{S}\mathbf{(K)} \cap \mathcal{A}\mathbf{(K)} = \{\underline{0}\}$ e $\mathbb{S}\mathbf{(K)} \oplus \mathcal{A}\mathbf{(K)}$.

**<u>DEF.</u> <u>2.10</u>** Sia $A=[a_{ij}] \in \mathbf{Mat_n(K)}$; chiamiamo **traccia** di A lo scalaredi K indicato con **tr(A)** e definito da

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

**<u>ESERCIZIO</u>** Si dimostri che la corrispondenza

$$tr : \begin{cases} \mathbf{Mat_n(K)} \longrightarrow K \\ A \longrightarrow tr(A) \end{cases}$$

è un epimorfismo (omomorfismo suriettivo) tra spazi vettoriali.

## 3 – L'ANELLO $Mat_n(K)$

Abbiamo definito nel paragrafo precedente un'operazione di addizione tra matrici e una moltiplicazione di uno scalare per una matrice. Nel presente paragrafo definiremo una operazione di moltiplicazione tra matrici.

**DEF. 3.1** Date una matrice riga $A \in \mathbf{Mat_{1,n}(K)}$ e una matrice colonna $B \in \mathbf{Mat_{n,1}(K)}$, $A=[a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}]$ e $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$, chiamiamo **prodotto della riga A per la colonna B** lo scalare k definito da:

$$k=[a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}].\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix} := a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+ \dots +a_{1n}b_{n1} = \sum_{h\in I_n} a_{1h}b_{h1}$$

**ESEMPIO**

$$[2\ \ 1\ \ 0\ \ 6].\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(-1)+1.2+ 0.1/2+6.1 = -2+2+0+6 = 6 .$$

**DEF. 3.2** Date le matrici $A=[a_{ih}]\in\mathbf{Mat_{m,p}(K)}$ e $B=[b_{hj}]\in\mathbf{Mat_{p,n}(K)}$, chiamiamo **prodotto (righe per colonne)** di A con B la matrice di $\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, indicata con AB, il cui elemento di posto (i,j) è il prodotto della i-esima ($i\in I_m$) riga di A con la j-esima ($j\in I_n$) colonna di B:

$$(AB)_{ij} =[a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ip}].\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \dots +a_{ip}b_{pj} = \sum_{h\in I_p} a_{ih}b_{hj} .$$



**OSSERVAZIONI**

1. La matrice prodotto AB ha tante righe quante quelle di A e tante colonne quante quelle di B.
2. Si noti che il prodotto AB è definito nell'ipotesi che il numero delle colonne di A sia uguale al numero di righe di B; se tale ipotesi non è verificata le due matrici non sono moltiplicabili.

**ESEMPIO** Siano A e B matrici reali: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

si ha $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.5+0.(-1) & 2.3+1.2+0.2 \\ 0.1-1.5+1/2.(-1) & 0.3-1.2+1/2.2 \\ 1.1+3.5+0.(-1) & 1.3+3.2+0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -11/2 & -1 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$

mentre non è definito il prodotto BA.

3. Se $A\in\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$ e $B\in\mathbf{Mat_{p,q}(K)}$, affinché siano definiti entrambi i prodotti è necessario e sufficiente che $m = q$ e $n = p$, ossia che $A\in\mathbf{Mat_{m,n}(K)}$ e $B\in\mathbf{Mat_{n,m}(K)}$; in tal caso $AB\in\mathbf{Mat_m(K)}$ e $BA\in\mathbf{Mat_n(K)}$.
4. L'operazione di moltiplicazione righe per colonne è interna a $\mathbf{Mat_n(K)}$.
5. La moltiplicazione righe per colonne **non è commutativa.**

**ESEMPIO** Se $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, si ha $AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, mentre $BA=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

DEF. 3.3 In **$Mat_n(K)$** chiamiamo **matrice identica** di ordine $n$ la matrice indicata con $I_n$ e definita da

$$I_n := [\delta_{ij}] \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

($\delta_{ij}$ è detto **simbolo di Kronecker**).

PROPRIETÀ 3.4

i) Se $A \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, $B \in \mathbf{Mat_{n,p}(K)}$ e $C \in \mathbf{Mat_{p,q}(K)}$ vale la proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$.

ii) Se $A, B \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, $C,D \in \mathbf{Mat_{n,p}(K)}$ valgono le proprietà distributive: $(A+B)C = AC+BC$ e $A(C+D) = AC+AD$.

iii) Se $A \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, $B \in \mathbf{Mat_{n,p}(K)}$ e $h \in \mathbf{K}$ si ha: $h(AB)=(hA)B=A(hB)$.

iv) Se $A \in \mathbf{Mat_{m,n}(K)}$, $B \in \mathbf{Mat_{n,p}(K)}$ si ha: $AI_n = A$ e $I_nB = B$.

v) Se A e B sono matrici tali che è definito il prodotto AB, allora è definito anche il prodotto $B^tA^t$ e si ha: $(AB)^t = B^tA^t$.

Le dimostrazioni sono lasciate al lettore.

PROPOSIZIONE 3.5

L'insieme **$Mat_n(K)$** ha la struttura di anello con unità rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione righe per colonne definite in precedenza.

DEFINIZIONE 3.6 Una matrice $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ si dice **invertibile** se esiste una matrice $B \in \mathbf{Mat_n(K)}$ tale che $AB = BA = I_n$.



OSSERVAZIONE La matrice B della precedente definizione, se esiste, è **unica**; infatti, sia $C \in \mathbf{Mat_n(K)}$ tale che $AC = CA = I_n$:

$$B \underset{\text{Prop3.4iv)}}{=} BI_n \underset{\text{Ip.}}{=} B(AC) \underset{\text{Prop3.4i)}}{=} (BA)C \underset{\text{def3.6}}{=} I_nC \underset{\text{Prop3.4iv)}}{=} C .$$

La matrice B è detta **inversa** di A e viene indicata con $A^{-1}$.

PROPOSIZIONE 3.7 Se $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ è invertibile allora $AB=I_n$ implica $BA=I_n$ e viceversa.

Dimostrazione. Sia $AB=I_n$:

$BA=I_n(BA)=(A^{-1}A)(BA)=A^{-1}(AB)A=A^{-1}I_nA= A^{-1}A=I_n$.

In modo analogo si dimostra il viceversa.

PROPOSIZIONE 3.8 Siano $A,B \in \mathbf{Mat_n(K)}$ invertibili:

i) $A^{-1}$ è invertibile e $(A^{-1})^{-1}=A$;

ii) $A^t$ è invertibile e $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$;

iii) AB è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Dimostrazione.

i) Segue immediatamente dalla definizione 3.6.

ii) Per le proprietà della trasposizione si ha $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$ e $(A^{-1})^tA^t= (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n$.

iii) Si ha $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}= AA^{-1}=I_n$ e, in modo analogo, $(B^{-1}A^{-1})(AB) =I_n$.

Indicheremo con **$GL_n(K)$** il sottoinsieme di **$Mat_n(K)$** costituito dalle matrici quadrate invertibili: $\mathbf{GL_n(K)} := \{A \in \mathbf{Mat_n(K)} \mid \exists A^{-1}\}$.

**<u>PROPOSIZIONE</u> <u>3.9</u>** $\mathbf{GL_n(K)}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.

La dimostrazione è lasciata al lettore.

**<u>DEFINIZIONE</u> <u>3.10</u>** Il gruppo $\mathbf{GL_n(K)}$ è detto **gruppo generale lineare.**



## 4 – LA NOZIONE DI DETERMINANTE

Intendiamo associare in modo univoco ad ogni matrice $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ uno scalare di K.

Nella trattazione seguente indicheremo con

- $A_j$ la j-esima ($j \in I_n$) colonna di A ($A_j \in \mathbf{Mat_{n,1}(K)}$);
- $A_{ij}$ la matrice di $\mathbf{Mat_{n-1}}$(K) ottenuta da $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna ($i,j \in I_n$).

**<u>DEF</u>. <u>4.1</u>** Chiamiamo **determinante** di $A=[a_{ij}] \in \mathbf{Mat_n(K)}$ **rispetto alla prima riga** lo scalare indicato con d(A) (oppure con det(A), |A|) e definito nel modo seguente:

$$d(A) := \begin{cases} a_{11} & \text{se } n=1 \\ a_{11}d(A_{11})-a_{12}d(A_{12})+\ldots+(-1)^{1+n}a_{1n}d(A_{1n}) = \sum\limits_{j\in I_n}(-1)^{1+j}a_{1j}d(A_{1j}) & \text{se } n\geq 2 \end{cases}$$

**<u>ESEMPIO</u>** Nel campo reale

1) A=[5/3] : d(A)=5/3

2) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ : $d(A) = 3d([0]) - 2d([-1]) = 3.0 - 2(-1) = 2$

**<u>PROPOSIZIONE</u> <u>4.2</u> (<u>I TEOREMA DI LAPLACE</u>)** Il determinante di una matrice può essere sviluppato rispetto ad una qualunque riga o colonna della matrice:

i) rispetto alla riga i-esima ($i \in I_n$): $\quad d(A) = \sum\limits_{j\in I_n}(-1)^{i+j}a_{ij}d(A_{ij})$

i) rispetto alla colonna j-esima ($j \in I_n$): $\quad d(A) = \sum\limits_{i\in I_n}(-1)^{i+j}a_{ij}d(A_{ij})$

**DEF. 4.3** Sia $A=[a_{ij}]\in\mathbf{Mat}_n(K)$; chiamiamo **complemento algebrico** dell'elemento $a_{ij}$ $(i,j\in I_n)$ lo scalare indicato con $C_{ij}$ e definito da

$$C_{ij} := (-1)^{i+j}d(A_{ij}).$$

Possiamo riscrivere le formule dello sviluppo del determinante di una matrice, date dal I teorema di Laplace, nel modo seguente:

i) rispetto alla riga i-esima $(i\in I_n)$: $\quad d(A) = \sum_{j\in I_n} a_{ij}C_{ij}$

i) rispetto alla colonna j-esima $(j\in I_n)$: $\quad d(A) = \sum_{i\in I_n} a_{ij}C_{ij}$

**PROPRIETÀ 4.4** Sia $A=[a_{ij}]\in\mathbf{Mat}_n(K)$; valgono per il determinante le seguenti proprietà:

i) $d(A) = d(A^t)$;

ii) se B è la matrice ottenuta da A moltiplicandone o una riga o una colonna per uno scalare $\alpha$, allora il determinante di B è il prodotto tra $\alpha$ e il determinante di A: $d(B) = \alpha d(A)$;

iii) siano $A=[A_1, \ldots, A_n]$, $C\in\mathbf{Mat}_{n,1}(K)$ e $i\in I_n$:

$$d([A_1, \ldots, A_i+C, \ldots, A_n]) = d([A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n]) + d([A_1, \ldots, C, \ldots, A_n])$$

(in modo analogo per le righe);

iv) se A ha due righe o due colonne uguali allora $d(A) = 0$;

v) se A ha una riga nulla o una colonna nulla allora $d(A) = 0$;

vi) se A ha due righe linearmente dipendenti o due colonne linearmente dipendenti allora $d(A) = 0$;

vii) se B è la matrice ottenuta scambiando di posto o due righe o due colonne di A allora $d(B) = -d(A)$;

viii) $d(I_n) = 1$.



**CALCOLO DEL DETERMINANTE DI PARTICOLARI MATRICI**

**1) Matrici quadrate di ordine 2**: se $A\in\mathbf{Mat}_2(K)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, abbiamo:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}\det([a_{22}]) - a_{12}\det([a_{21}]) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**2) Matrici quadrate di ordine 3**: se $A\in\mathbf{Mat}_3(K)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, si ha:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Osserviamo che si può ottenere lo sviluppo del determinante di A nel modo seguente:

- accostiamo, a destra della matrice, la prima e la seconda colonna (oppure, sotto la matrice, la prima e la seconda riga)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

- sommiamo il prodotto degli elementi della diagonale principale con i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele;
- dalla somma sottraiamo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria e i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele.

La regola descritta è la cosiddetta **regola di Sarrus**.

**3) Matrici diagonali di ordine $n$**: se $A \in \mathbf{Mat}_n(K)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima riga, abbiamo: $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - 0\det(A_{12}) + \dots + 0\det(A_{1n}) = a_{11}\det(A_{11}) =$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La matrice $A_{11}$ è a sua volta una matrice diagonale di ordine $n$-1 e avente sulla diagonale principale gli stessi elementi di A, tranne $a_{11}$; se sviluppiamo il suo determinante rispetto alla prima riga otteniamo:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Iterando lo sviluppo del determinante ricaviamo:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

ossia il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi della diagonale principale.

**4) Matrici triangolari superiori (inferiori) di ordine $n$**: in modo analogo a quanto fatto per le matrici diagonali, si dimostra che il determinante di una matrice triangolare superiore (inferiore) è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale.



**METODO DI GAUSS – JORDAN PER IL CALCOLO DEL DETERMINANTE**

Il metodo di Gauss - Jordan per il calcolo del determinante consiste nel trasformare una matrice $A \in \mathbf{Mat}_n(K)$ in una matrice triangolare (superiore) $T \in \mathbf{Mat}_n(K)$, applicando alle colonne (righe) di A le seguenti operazioni:

a) scambiare tra loro due colonne (o due righe);

b) moltiplicare tutti gli elementi di una colonna (o di una riga) per uno stesso scalare non nullo;

c) sommare ad una colonna (una riga) un multiplo scalare di un'altra.

In forza delle proprietà 4.4, si verifica che

1) ogni operazione di tipo (a) ha come effetto un cambiamento di segno nel determinante;

2) per ogni operazione di tipo (b) il determinante risulta moltiplicato per lo scalare;

3) ogni operazione di tipo (c) non modifica nel determinante.

**ESEMPIO** Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan alla matrice reale $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(a) con } A_1 \text{ e } A_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(c) con } A'_2 \text{ e } (-1/4)A_3} \begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 3 \\ -1 & 7/4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(c) con } A'_1 \text{ e } 4/7A''_2} \begin{bmatrix} 12/7 & 5/4 & 3 \\ 0 & 7/4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =: T;$$

abbiamo allora $\det(A) = -\det(T) = -12$.

In generale, se per trasformare $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ in una matrice triangolare (superiore) $T \in \mathbf{Mat_n(K)}$, sono stati eseguiti $p$ ($p \in \mathbf{N}$) scambi di colonne (o di righe), $q$ ($q \in \mathbf{N}$) operazioni di tipo (b) con gli scalari $k_1, \ldots, k_q$, risulta:

$$\det(A) = (-1)^p (k_1 \cdot \ldots \cdot k_q)^{-1} \det(T).$$

<u>**PROPOSIZIONE**</u> **<u>4.5</u>** (<u>**II TEOREMA DI LAPLACE**</u>) Se $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ si ha

i) $\displaystyle\sum_{j \in I_n} a_{ij} C_{kj} = \delta_{ik} \det(A) \qquad (i,k \in I_n)$

ii) $\displaystyle\sum_{i \in I_n} a_{ij} C_{ih} = \delta_{jh} \det(A) \qquad (j,h \in I_n)$

con $\delta_{pq}$ simbolo di Kronecker.

La proposizione, che non viene dimostrata, include il I teorema di Laplace, ponendo in (i) $i=k$ e in (ii) $j=h$; invece, se $i \neq k$ la (i) afferma che è 0 la somma dei prodotti degli elementi di una riga (la i-esima) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (la k-esima). In modo analogo, se $j \neq h$ la (ii) afferma che è 0 la somma dei prodotti degli elementi di una colonna (la j-esima) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra colonna (la h-esima).

<u>**PROPOSIZIONE**</u> **<u>4.6</u>** (<u>**TEOREMA DI BINET**</u>) Se $A, B \in \mathbf{Mat_n(K)}$ si ha

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$



<u>**PROPOSIZIONE**</u> **<u>4.7</u>** Una matrice $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione

$\Rightarrow$) $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ è invertibile $\Rightarrow$ (def. 3.6) $\exists B \in \mathbf{Mat_n(K)} : AB = BA = I_n$ $\Rightarrow$ $\det(AB)=\det(I_n)$ $\Rightarrow$ (teor. di Binet) $\det(A)\det(B)=1$ $\Rightarrow$ (K campo) $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sia $\det(A) \neq 0$, dimostriamo che A è invertibile costruendone l'inversa: se $A=[a_{ij}]$ e $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ è il complemento algebrico di $a_{ij}$ ($i,j \in I_n$), definiamo

$$B := \frac{1}{\det(A)} [C_{ij}]^t .$$

Verifichiamo che $AB=I_n$: se indichiamo con $(AB)_{ij}$ l'elemento di posto $(i,j)$ ($i,j \in I_n$) del prodotto AB, abbiamo

$$(AB)_{ij} = \sum_{h \in I_n} a_{ih} b_{hj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih} \frac{C_{jh}}{d(A)} = \frac{1}{d(A)} \sum_{h \in I_n} a_{ih} C_{jh}$$

e applicando il II teorema di Laplace

$$(AB)_{ij} = \frac{1}{d(A)} \delta_{ij} \det(A) = \delta_{ij} ,$$

ossia $AB=I_n$.

In modo analogo si dimostra che $BA=I_n$.

<u>**PROPOSIZIONE**</u> **<u>4.8</u>** Se $A \in \mathbf{Mat_n(K)}$ è invertibile allora

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

La dimostrazione è già presente nella dimostrazione dell'implicazione necessaria della precedente proposizione: infatti, da $\det(A)\det(B)=1$ deduciamo $\det(B)=(\det(A))^{-1}$, essendo $B=A^{-1}$.